\

AN18



DES ANTILLES
ET DE LA GUYANE

Problème ENSI 1991 option P

Etude de $xy'' + y' + xy = 0$

Dans tout le problème, on désigne par :

R l'ensemble des nombres réels ;
R_+ (respectivement R_+^*) l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls (respectivement strictement positifs) ;
Z l'ensemble des entiers relatifs ;
x une variable réelle ;
y une fonction de la variable x définie sur une partie de R, y' et y", si elles existent, les dérivées première et seconde de y.

Le but de ce problème est d'étudier différentes propriétés d'une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad xy'' + y' + xy = 0$$

PREMIERE PARTIE

On s'intéresse à la recherche d'une solution de (E) développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

I - 1 - Déterminer une solution F de (E) développable en série entière et telle que F(0) = 1 ; expliciter le rayon de convergence de la série obtenue et calculer F ' (0).

I - 2 - Soient g la fonction des deux variables x et θ définie sur $R \times \left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$ par :

$$(x, \theta) \rightarrow g(x, \theta) = \cos(x \sin\theta)$$

et h la fonction des deux variables x et t définie sur R x [0, 1 [par :

$$(x, t) \rightarrow h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

I - 2 - a - Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est absolument convergente quel que soit x dans R.

I - 2 - b - On pose : $G(x) = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} g(x, \theta)\,d\theta$; $H(x) = \int_0^1 h(x, t)\,dt$

I - 2 - b - i - Montrer que G(x) = H(x) pour tout x appartenant à R.

I - 2 - b - ii - Montrer que G est indéfiniment dérivable sur R et donner l'expression de la dérivée d'ordre n de G sous forme d'une intégrale.

I - 2 - b - iii - Montrer que G est développable en série entière sur R.

I - 2 - c - On note respectivement G' et G" les dérivées première et seconde de G.

I - 2 - c - i - Calculer G(0).

I - 2 - c - ii - Utilisant l'expression de G' obtenue en 2-b-ii- montrer que :

$$\forall x \in R, \qquad G'(x) = -x(G''(x) + G(x))$$

I - 2 - c - iii - Exprimer F(x) en fonction de G(x), respectivement de H(x)

I - 2 - d - i - Montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, quel que soit x dans **R** :

$$\left| \int_{\alpha}^{1} h(x,t)\, dt \right| < \varepsilon/2$$

I - 2 - d - ii - α étant ainsi choisi, calculer : $\lim \int_{0}^{\alpha} h(x,t)\, dt \qquad \infty + \leftarrow x$

puis déterminer : $\lim F(x) \qquad x \to +\infty$

I - 2 - d - iii - Montrer que, pour tout x appartenant à **R** :

$$H'(x) = \int_{0}^{1} \frac{-t \sin(x\,t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

I - 2 - d - iiii - Calculer : $\lim F'(x) \qquad x \to +\infty$

DEUXIEME PARTIE

On se propose de montrer, d'une part, que quel que soit l'entier relatif k, la fonction F s'annule dans tout intervalle $]k\Pi, (k+1)\Pi[$ et d'autre part que si φ désigne une solution de (E) sur un intervalle $]-\rho, \rho[$ avec $\rho > 0$ alors φ et F sont proportionnelles.

II - 1 - Vérifier que s'il existe un réel x_i tel que $F(x_i) = 0$ alors $F(-x_i) = 0$ et x_i est différent de zéro.

II - 2 - On suppose dans cette question que x est strictement positif et on considère la fonction u de la variable x définie par :

$$x \to u(x) = \sqrt{x}\, F(x)$$

II - 2 - a - Montrer que u vérifie une équation différentielle du second ordre du type :

$$u'' + A(x)\, u = 0$$

u'' désignant la dérivée seconde de u, A une fonction de la variable x que l'on explicitera.

II - 2 - b - Soit v une application deux fois dérivable de R_+^* dans R.

Montrer que la relation :

$$(R_1) : \forall x \in R_+^*, \ \frac{d}{dx}\left[u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)\right] = \frac{u(x)\, v(x)}{4\, x^2}$$

est vérifiée si et seulement si v est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on explicitera.

II - 2 - c - i - Déduire de ce qui précède que :

$$(R_2) : \forall p \in N^*, \ \int_{p\Pi}^{(p+1)\Pi} \frac{u(x) \sin x}{4\, x^2}\, dx = (-1)^{p+1} \left[u((p+1)\Pi) + u(p\Pi)\right]$$

II - 2 - c - ii - Montrer que $\displaystyle\int_0^{\Pi} \frac{u(x) \sin x}{4 x^2} dx$ converge et est égale à $-u(\Pi)$.

II - 2 - d - Utilisant la question II-2-c, démontrer que, quel que soit p dans $\mathbb{N}$, il existe $x_p \in \,]\, p\,\Pi, (p+1)\,\Pi\,[$ tel que $u(x_p) = 0$; en conclure que F s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$, respectivement sur $\mathbb{R}_-^*$, une infinité de fois.

II - 3 - a - Montrer que F est de signe constant sur $[-2, 2]$ et préciser ce signe.

II - 3 - b - Dans cette question φ designe une solution de E sur $]-\rho, \rho[$, avec ρ réel strictement positif.

On pose $\Delta = \,]-\rho, \rho[\, \cap [-2, 2]$.

II - 3 - b - i - Ecrire l'équation différentielle (E_1) vérifiée par la fonction z définie sur Δ par :

$$z(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$$

II - 3 - b - ii - Déduire de (E_1) que $x\, z'(x)\, F^2(x)$ est constant sur Δ ; en conclure que les restrictions de φ et de F à Δ sont proportionnelles.

TROISIEME PARTIE

λ désignant un réel non nul, on étudie différentes propriétés de la fonction F_λ de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_\lambda(x) = F(\lambda x)$.

III - 1 - a - Ecrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par F_λ.

III - 1 - b - Soit a un réel strictement positif. Déterminer toutes les solutions, développables en série entière, de l'équation différentielle :

$$x y'' + y' + a x y = 0$$

III - 2 - Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs distinctes de λ. Montrer que, pour tout x réel l'expression

$$\frac{d}{dx}\left\{ x\left[F'_{\lambda_1}(x)\ F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x)\ F'_{\lambda_2}(x)\right]\right\} + \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) x\, F_{\lambda_1}(x)\ F_{\lambda_2}(x)$$

garde une valeur constante que l'on déterminera.

III - 3 - Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 x\ F_{x_i}(x)\ F_{x_j}(x)\, dx$$

sachant que $F(x_i) = F(x_j) = 0$ et $x_i \neq x_j$.

QUATRIEME PARTIE

s étant un réel strictement positif on se propose de calculer :

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x)\, dx$$

IV - 1 - Montrer que F^* converge quel que soit s strictement positif.

IV - 2 - a - t étant un réel quelconque, montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx)\, dx$$

converge quel que soit s strictement positif et quel que soit t ; calculer sa valeur en fonction de t et de s.

IV - 2 - b - Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + s^2)\sqrt{1 - t^2}}$$

converge quel que soit s strictement positif et calculer sa valeur en fonction de s.

IV - 3 - On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \left(\frac{2}{\Pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{\Pi\sqrt{1 - t^2}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx)\, dx \right) dt$$

IV - 3 - a - Calculer $F^*(s)$, $s > 0$.

IV - 3 - b - Calculer $\lim\limits_{\substack{s > 0 \\ s \to 0}} F^*(s)$



DES ANTILLES
ET DE LA GUYANE

PREMIERE PARTIE

I) 1) Soit y développable en série entière sur $]-R,R[$ ($R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$)

On écrit $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in]-R,R[$.

y est de classe C^∞ sur $]-R,R[$; en particulier :
Si $x \in]-R,R[$,

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

(y solution de (E) sur $]-R,R[$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in]-R,R[$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0 \Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall x \in]-R,R[,\ a_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall x \in]-R,R[,\ a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)^2 a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} x^k = 0\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall x \in]-R,R[,\ a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1}\right] x^k = 0\Big)$$

(toutes les séries écrites étant convergentes sur $]-R,R[$.)
Par unicité du développement en série entière d'une fonction sur un intervalle ouvert non vide, on en déduit :
(y solution de (E) sur $]-R,R[$) $\Leftrightarrow$ ($a_1 = 0$ et $\forall k \geq 1$, $a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1} = 0$)

Comme $a_1 = 0$, on obtient aisément par récurrence :
$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$.
$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2(p+1)} = -\dfrac{1}{(2p+2)^2} a_{2p} = -\dfrac{1}{4(p+1)^2} a_{2p}$.

Là encore, une récurrence simple montre que :
$\forall p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0 .$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est alors infini car :

$$\lim_{p \to +\infty} \left| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \right| = 0$$

Enfin, ($y(0) = 1$) $\Leftrightarrow$ ($a_0 = 1$)
Ainsi,

> F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k}$

F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$; en particulier :

> $F'(0) = 0$

2) a) Pas de problème d'intégration en dehors de 1 car $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On constate que si $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1[$, $\dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge (Arcsin a une limite finie en 1)

Donc

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est absolument convergente qu^d que soit x dans $\mathbb{R}$

b) i) Soit $\varepsilon \in]0,1[$; dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, on effectue le changement de variable $t = \sin\theta$ avec $\theta \in [0, \operatorname{Arcsin}(1-\varepsilon)]$.

$dt = \cos\theta\, d\theta = \sqrt{1-t^2}\, d\theta$.

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(1-\varepsilon)} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $u \longmapsto \displaystyle\int_0^u \cos(x\sin\theta)\,d\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$.

($\theta \longmapsto \cos(x\sin\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$)

D'où :

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\operatorname{Arcsin}(1-\varepsilon)} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^{\operatorname{Arcsin}(1)} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$

On en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = H(x)$

ii) $G(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$

$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \longmapsto \cos(x\sin\theta)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée $2k^{\text{ème}}$ étant $x \longmapsto (-1)^k (\sin\theta)^{2k} \cos(x\sin\theta)$

Sa dérivée $(2k+1)^{\text{ème}}$ étant $x \longmapsto (-1)^{k+1} (\sin\theta)^{2k+1} \sin(x\sin\theta)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \longmapsto (-1)^k (\sin\theta)^{2k} \cos(x\sin\theta)$ et $\theta \mapsto (-1)^{k+1}(\sin\theta)^{k+1} \times \sin(x\sin\theta)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi :

G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ G^{(2k)}(x) = (-1)^k \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2k} \cos(x\sin\theta)\,d\theta$
$G^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2k+1} \sin(x\sin\theta)\,d\theta$

iii) On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $|G^{(n)}(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que la série de Taylor associée à G est convergente sur $\mathbb{R}$:

en effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists c \in [0,x]$ ou $[x,0]$;

$$G(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} G^{(n+1)}(c).$$

D'où :

$$\left| G(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{\pi x^{n+1}}{2(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge et $G(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$

c) i)

$$G(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(0)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \ \sin(x \sin\theta)\, d\theta$

On effectue une intégration par parties en posant
$u(\theta) = \sin(x \sin\theta)$ d'où $u'(\theta) = x\cos\theta \cos(x\sin\theta)$
et $v(\theta) = \cos\theta$ d'où $v'(\theta) = -\sin\theta$.

$$G'(x) = \Big[\cos\theta \sin(x \sin\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2\theta \cos(x\sin\theta)\, d\theta$$

$$= -x\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos(x\sin\theta)\, d\theta = -x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\theta)\, d\theta - x\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2\theta)\cos(x\sin\theta)\, d\theta.$$

En utilisant les résultats de I.2.b.ii), on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = -x\left[G(x) + G''(x)\right]$$

iii) On sait que les solutions de (E) développables en série entière sur un intervalle ouvert non vide, sont les multiples de la restriction de F à cet intervalle. Or G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (I.2.b.iii)) et solution de (E) sur $\mathbb{R}$ (I.2.c.ii))
donc G est un multiple de F ;
or $F(0) = 1$ et $G(0) = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$F(x) = \frac{2}{\pi} G(x) = \frac{2}{\pi} H(x)$$ (voir I.2.b.i))

d) i) $\left|\int_\alpha^1 h(x,t)\, dt\right| \leqslant \int_\alpha^1 |h(x,t)|\, dt \leqslant \int_\alpha^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}\alpha$

(↑ $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ absolument convergente)

Or $\lim_{\substack{\alpha\to 1\\ \alpha<1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha)\right) = 0$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in]0,1[\ ;\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ (α indépendant de x !) alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\int_\alpha^1 h(x,t)\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

ii) Si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos(xt)\, dt = \left[\frac{1}{x}\sin(xt)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]_0^\alpha - \frac{1}{x}\int_0^\alpha \sin(xt)\frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\, dt$$

(↑ intégration par parties
$u(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad u'(t) = \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}$
$v(t) = \frac{\sin(xt)}{x}$ $\quad v'(t) = \cos(xt)$)

D'où, $\left|\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cos(xt)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{|x|}\int_0^\alpha \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}\, dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Ainsi,

$\lim_{x\to+\infty} \int_0^\alpha h(x,t)\, dt = 0$: $\exists A > 0\ ;\ (x \geqslant A) \Rightarrow \left(\left|\int_0^\alpha h(x,t)\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Alors, si $x \geqslant A$, $|F(x)| = \frac{2}{\pi}\cdot|H(x)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right|$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\alpha \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt + \int_\alpha^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\right|$$

$$\leqslant \left|\int_0^\alpha h(x,t)\, dt\right| + \left|\int_\alpha^1 h(x,t)\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

ii) Comme $H = G$ sur $\mathbb{R}$, H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H' = G'$.

Or $G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin\theta \sin(x \sin\theta)\, d\theta$

et $\forall \varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} - \sin\theta \sin(x\sin\theta)\, d\theta = \int_0^{\sin(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)} -t \sin(xt) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

changement de variable
$t = \sin\theta$ $dt = \cos\theta\, d\theta = \sqrt{1-t^2}\, d\theta$

$\int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente $\left(\left| \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \text{ si } t \in [0,1[\right)$

D'où par passage à la limite lorsque ε tend vers 0.

$$\boxed{H'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt}$$

iii) On opère comme au I.2.d) :

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in]0,1[$

$$\left| \int_\alpha^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leqslant \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(\alpha) \xrightarrow[\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}]{} 0$$

On peut donc choisir α de sorte que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \int_\alpha^1 \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

α étant fixé, on remarque que, pour $x \neq 0$

$$\int_0^\alpha \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt = \left[\frac{1}{x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cos(xt) \right]_0^\alpha - \frac{1}{x} \int_0^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \right) \cos(xt)\, dt$$

intégration par parties
$u(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad u'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$
$v'(t) = -\sin(xt)$ $\quad v(t) = \frac{\cos(xt)}{x}$

$$\left| \int_0^\alpha \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{|x|} \underbrace{\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \int_0^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \right]}_{\text{constante indépendante de } x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$\exists A > 0, \forall x > A$, $\left| \int_0^\alpha \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Alors, si $x > A$,

$$|H'(x)| = \left| \int_0^\alpha \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt + \int_\alpha^1 \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt \right|$$

$$\leqslant \left| \int_0^\alpha \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt \right| + \left| \int_\alpha^1 \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} H'(x) = 0$ et comme $F = \frac{2}{\pi} H$, $F' = \frac{2}{\pi} H'$.

D'où :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F'(x) = 0}$$

IV

DEUXIEME PARTIE

II) 1) F est clairement paire (voir développement en série entière) donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = F(x)$.
En particulier,

> Si $F(x_i) = 0$ alors $F(-x_i) = 0$

Enfin, $F(0) = 1 \neq 0$.

2) a) u est définie sur $]0,+\infty[$ et de classe C^∞ sur cet intervalle (produit de fonctions de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$)
En particulier : $\forall x > 0$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F(x) + \sqrt{x}\, F'(x)$

$$u''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} F(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} F'(x) + \sqrt{x}\, F''(x).$$

On constate alors que $\sqrt{x}\, u''(x) = -\frac{1}{4x} F(x) + F'(x) + x F''(x)$

$$= -\frac{1}{4x} F(x) - x F(x) \quad (F \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R})$$

Ainsi $\sqrt{x}\, u''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} u(x) - \sqrt{x}\, u(x)$.

> u vérifie l'équation différentielle :
> $u'' + A(x)\, u = 0$ avec
> $A(x) = 1 + \frac{1}{4x^2}$ sur $]0,+\infty[$

b) $\left((R_1) \text{ est vérifiée} \right) \Leftrightarrow \left(\forall x > 0,\ u(x) v''(x) - u''(x) v(x) = \frac{u(x) v(x)}{4x^2} \right)$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x > 0,\ u(x) v''(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) v(x) u(x) = \frac{u(x) v(x)}{4x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x > 0,\ u(x) \left[v''(x) + v(x) \right] = 0 \right)$$

Ne connaissant rien des zéros de u sur $]0,+\infty[$, on ne peut conclure directement qu'une condition NECESSAIRE et suffisante pour que (R_1) soit vérifiée est que v soit solution de l'équation différentielle $v'' + v = 0$; en tout cas, cette condition est suffisante et l'on peut se contenter de ça pour résoudre le reste du problème.
Ainsi,

> Une condition suffisante pour que (R_1) soit vérifiée est que v soit solution de l'équation différentielle $v'' + v = 0$

c) i) En particulier, pour $v = \sin$, (R_1) est vérifiée.
(R_1) s'écrit ici :

$$\forall x > 0, \quad \frac{d}{dx}\left[u(x) \cos x - u'(x) \sin x \right] = \frac{u(x) \sin x}{4x^2}$$

En particulier, si $p \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2}\, dx = \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{d}{dx}\left[u(x) \cos x - u'(x) \sin x \right] dx$$

$$= \left[u(x) \cos x - u'(x) \sin x \right]_{p\pi}^{(p+1)\pi}$$

$$= u\left[(p+1)\pi\right] \cos\left[(p+1)\pi\right] - u(p\pi) \cos(p\pi)$$

$$= (-1)^{p+1} \left[u\left[(p+1)\pi\right] - \left(-u(p\pi)\right) \right]$$

> $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2}\, dx = (-1)^{(p+1)\pi} \left[u((p+1)\pi) - u(p\pi) \right]$

ii) $\forall \varepsilon \in]0,\pi[$, $\displaystyle\int_\varepsilon^\pi \frac{u(x)\sin x}{4x^2}\,dx = \left[u(x)\cos x - u'(x)\sin x\right]_\varepsilon^\pi$

$= -u(\pi) - u(\varepsilon)\cos\varepsilon + u'(\varepsilon)\sin\varepsilon$.

Or $u(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,F(\varepsilon) \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}{\longrightarrow} 0$.

et

$$u'(\varepsilon)\sin\varepsilon = \Big[\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}F(\varepsilon)}_{\underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \underbrace{\sqrt{\varepsilon}\,F'(\varepsilon)}_{\underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}{\longrightarrow}0}\Big]\sin\varepsilon \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}{\sim} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^\pi \frac{u(x)\sin x}{4x^2}\,dx$ existe et vaut $-u(\pi)$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{u(x)\sin x}{4x^2}\,dx \text{ converge et est égale à } -u(\pi)}$$

d) Si u ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, l'application $\theta : x \longmapsto \frac{u(x)\sin x}{4x^2}$ garde un signe constant sur $]0,\pi[$ (fonction continue ne s'annulant pas)

Si $u>0$ sur $]0,\pi[$, par continuité de θ, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{u(x)\sin x}{2x^2}\,dx > 0$ d'où $u(\pi)<0$. Absurde ($u>0$ sur $]0,\pi[$ et u continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $u(\pi)\geqslant 0$).

Si $u<0$ sur $]0,\pi[$, on obtient $u(\pi)>0$ ce qui est absurde.

Ainsi u s'annule sur $]0,\pi[$.

Plus généralement, si $p\in\mathbb{N}^*$ et si u ne s'annule pas sur $]p\pi,(p+1)\pi[$, θ a le signe de $u\sin$ sur cet intervalle donc le signe de $(-1)^p u$.

Alors, $\displaystyle\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\theta(x)\,dx$ a le signe de $(-1)^p u$ par continuité de θ.

Donc sur $]p\pi,(p+1)\pi[$, u a même signe que $-u(p\pi)-u((p+1)\pi)$ ce qui est absurde car :

Si $u>0$ sur $]p\pi,(p+1)\pi[$, $u(p\pi)\geqslant 0$ et $u((p+1)\pi)\geqslant 0$ et $-u(p\pi)-u((p+1)\pi)\leqslant 0$.

Si $u<0$ sur $]p\pi,(p+1)\pi[$, $u(p\pi)\leqslant 0$ et $u((p+1)\pi)\leqslant 0$ et $-u(p\pi)-u((p+1)\pi)\geqslant 0$

Ainsi, u s'annule sur $]p\pi,(p+1)\pi[$: $\forall p\in\mathbb{N}$, $\exists x_p\in]p\pi,(p+1)\pi[$; $u(x_p)=0$.

Comme $u(x)=\sqrt{x}\,F(x)$ et comme $x_p>0$, $\forall p\in\mathbb{N}$, on en déduit $F(x_p)=0$.

F a un zéro sur chaque intervalle $]p\pi,(p+1)\pi[$ $(p\in\mathbb{N})$: F s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ une infinité de fois. D'après II.1), F s'annule aussi une infinité de fois sur $\mathbb{R}_-^*$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{F s'annule sur } \mathbb{R}_+^*\text{, respectivement sur } \mathbb{R}_-^*\text{, une infinité de fois}}$$

3) a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k$

Si $x\in[-2,2]$, $\frac{x^2}{4}\in[0,1]$; on pose $u_k(x) = \left(\frac{x^2}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{k!}\right)^2$.

$F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k(x)$.

Or $u_k(x)\geqslant 0$, $\dfrac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} = \left(\dfrac{x^2}{4}\right)\times\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant 1$ donc $(u_k(x))_{k\geqslant 0}$ est décroissante $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} u_k(x) = 0$.

$F(x)$ est la somme d'une série alternée : $F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (U_{2p}(x) - U_{2p+1}(x))$

$= \underbrace{U_0(x) - U_1(x)}_{>0} + \sum_{p=1}^{+\infty} [U_{2p}(x) - U_{2p+1}(x)]$

même pour $x = 0$.

Ainsi,

$$\boxed{F(x) > 0 \text{ si } x \in [-2, 2]}$$

b) i) z est définie sur Δ, de classe C^∞ sur Δ (quotient de 2 fonctions C^∞ sur Δ, dénominateur ne s'annulant pas sur Δ).

$\forall x \in \Delta$, $\varphi(x) = z(x).F(x)$.

D'où, $\forall x \in \Delta$, $\varphi'(x) = z'(x)\,F(x) + z(x)\,F'(x)$

$\varphi''(x) = z''(x)\,F(x) + 2z'(x)\,F'(x) + z(x)\,F''(x)$

$\underbrace{x\,\varphi''(x)}_{-\varphi'(x) - x\varphi(x)} = x\,z''(x)\,F(x) + 2x z'(x) F'(x) + z(x)\,\underbrace{x F''(x)}_{-F'(x) - xF(x)}$

(car φ et F sont solutions de (E) sur Δ)

D'où $\forall x \in \Delta$, $z'(x)\,F(x) - z(x)\,\cancel{F'(x)} - x\,\cancel{z(x)}\,F(x)$

$= x\,z''(x)\,F(x) + 2x\,z'(x)\,F'(x) - \cancel{z(x)F'(x)} - x\,\cancel{z(x)F(x)}$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c} z \text{ est solution sur } \Delta \text{ de l'équation différentielle :} \\ x\,F(x)\,z''(x) + [2x\,F'(x) + F(x)]\,z'(x) = 0 \end{array}}$$

ii) On remarque que $x \longmapsto x\,z'(x)\,F^2(x)$ est dérivable sur Δ et que :

$\forall x \in \Delta$, $\frac{d}{dx}[x\,z'(x)\,F^2(x)] = [x\,z''(x) + z'(x)]\,F^2(x) + 2\,F(x)F'(x)\,x\,z'(x)$

$= F(x)\,[\underbrace{x\,F(x)\,z''(x) + (2x\,F'(x) + F(x)\,z'(x))}_{=0 \text{ d'après } (E1)}] = 0$

Or Δ est un intervalle. Donc,

$$\boxed{x\,z'(x)\,F^2(x) \text{ est constant sur } \Delta}$$

$\forall x \in \Delta$, $x\,z'(x)\,F^2(x) = 0\,z'(0)\,F^2(0) = 0$.

D'où $\forall x \in \Delta$, $x\,z'(x) = 0$ (F ne s'annule pas sur Δ)

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \Delta\setminus\{0\},\ z'(x) = 0 \\ z' \text{ est continue sur } \Delta \end{array}\right)$ d'où $\forall x \in \Delta$, $z'(x) = 0$

Δ étant un intervalle, on en déduit que $z = $ cste $= k$ sur Δ

Ainsi : $\forall x \in \Delta$, $\varphi(x) = k\,F(x)$:

$$\boxed{\text{Les restrictions de } \varphi \text{ et de } F \text{ à } \Delta \text{ sont proportionnelles}}$$

TROISIEME PARTIE

III) 1) a) F_λ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tout comme F

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_\lambda(x) = \lambda F'(\lambda x)$

$F''_\lambda(x) = \lambda^2 F''(\lambda x)$

D'où, $x F''_\lambda(x) = \lambda^2 x F''(\lambda x) = \lambda(\lambda x F''(\lambda x)) = -\lambda F'(\lambda x) - \lambda^2 x F(\lambda x)$

$= -F'_\lambda(x) - \lambda^2 x F_\lambda(x)$.

F_λ vérifie l'équation différentielle :

$$\boxed{x y'' + y' + \lambda^2 x y = 0}$$

b) Si y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on désigne par y_λ la fonction $x \mapsto y(\lambda x)$.

On constate aisément que y est solution de l'équation proposée sur $]-R, R[$ si et seulement si $y_{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ est solution de (E) sur $]-\sqrt{a}R, \sqrt{a}R[$ et y est développable en série entière sur $]-R, R[$ si et seulement si $y_{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ est développable en série entière sur $]-\sqrt{a}R, \sqrt{a}R[$.

Or les seules fonctions développables en série entière et solutions de (E) sur $]-\sqrt{a}R, \sqrt{a}R[$ sont les multiples de la restriction de F à cet intervalle.

Ainsi, les solutions, développables en série entière, de l'équation différentielle $xy'' + y' + axy = 0$ sont les multiples de $F_{\sqrt{a}}$; le rayon de convergence de ces séries est infini.

2) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left[F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x)\right]\right\} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x)$$

$$= F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x) + x\left[F''_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F''_{\lambda_2}(x)\right] + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x).$$

$$= F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x) + F_{\lambda_2}(x)\left[-F'_{\lambda_1}(x) - \lambda_1^2 x F_{\lambda_1}(x)\right]$$
$$- F_{\lambda_1}(x)\left[-F'_{\lambda_2}(x) - \lambda_2^2 x F_{\lambda_2}(x)\right] + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x).$$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dx}\left\{x\left[F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x)\right]\right\} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) = 0}$$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x F_{x_i}(x) F_{x_j}(x) \underset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{x_j^2 - x_i^2} \dfrac{d}{dx}\left\{x\left[F'_{x_i}(x) F_{x_j}(x) - F_{x_i}(x) F'_{x_j}(x)\right]\right\}$

$x_i \neq x_j$ (les notations sont celles de II)

On a bien sûr $x_i \neq -x_j$ car $x_i, x_j > 0$.

D'où $J = \dfrac{1}{x_j^2 - x_i^2}\left[x\left[F'_{x_i}(x) F_{x_j}(x) - F_{x_i}(x) F'_{x_j}(x)\right]\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{x_j^2 - x_i^2}\left[F'_{x_i}(1) F_{x_j}(1) - F_{x_i}(1) F'_{x_j}(1)\right]$

Or $F_{x_j}(1) = F(x_j \times 1) = F(x_j) = 0$ et $F(x_i) = 0$.

D'où :

$$\boxed{J = 0}$$

QUATRIEME PARTIE

De façon générale, si f est une fonction continue, bornée sur $\mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$ converge quel que soit s strictement positif.

En effet, $\exists M>0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| \leq M$.
alors $|e^{-sx} f(x)| \leq M e^{-sx}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx$ converge $\left(\left(\int_0^A e^{-sx} dx = \frac{1-e^{-sA}}{s} \right) \right)$

IV) 1) F est continue sur $\mathbb{R}$ et a une limite finie (nulle) en $+\infty$ (et donc aussi en $-\infty$ par parité); donc F est bornée sur $\mathbb{R}$;
d'après la remarque du début du IV):

> F^* converge quel que soit s strictement positif

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\cos(tx)| \leq 1$. $x \longmapsto \cos(tx)$ est continue bornée sur $\mathbb{R}$, pour tout t réel.
D'après la remarque du début du IV, $\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx)\,dx$ converge quel que soit s strictement positif et quel que soit t.

$$\forall A>0,\ \forall s>0,\ \int_0^A e^{-sx} \cos(tx)\,dx = \left[-\cos(tx) \frac{e^{-sx}}{s} \right]_0^A - \int_0^A \frac{t}{s} e^{-sx} \sin(tx)\,dx$$

intégration par parties
$u(x) = \cos(tx)$ $\quad u'(x) = -t\sin(tx)$
$v(x) = -\frac{1}{s} e^{-sx}$ $\quad v'(x) = e^{-sx}$

$$= \frac{1}{s}\left[1-\cos(tA)e^{-sA}\right] - \frac{t}{s}\left[-\frac{1}{s}\sin(tx)e^{-sx}\right]_0^A - \frac{t}{s}\int_0^A \frac{t}{s} e^{-sx}\cos(tx)\,dx$$

intégration par parties
$u(x) = \sin(tx)$ $\quad u'(x) = t\cos(tx)$
$v(x) = -\frac{1}{s} e^{-sx}$ $\quad v'(x) = e^{-sx}$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(tx)\,dx$ converge, par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient : $\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(tx)\,dx = \frac{1}{s} - \frac{t^2}{s^2}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(tx)\,dx$
c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(tx)\,dx = \frac{s}{s^2+t^2}, \forall s>0}$$

Remarque : On peut aussi obtenir ce résultat en remarquant que :
$\int_0^A \cos(tx) e^{-sx}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^A e^{-sx} e^{itx}\,dx \right) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{-s+it}\left[e^{-sx+itx}\right]_0^A \right\}$

b) $t \longmapsto \frac{1}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$; le seul problème pour l'intégrale est pour la borne 1.

Or $\left| \frac{1}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}} \right| \underset{\forall t\in[0,1[}{\leq} \frac{1}{s^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge.

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}}$ converge quel que soit s strictement positif.

$$\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\mathrm{Arcsin}(1-\varepsilon)} \frac{du}{s^2+\sin^2 u}$$

changement de variable
$t = \sin u$ $\quad dt = \sqrt{1-t^2}\,du$

Or $u \longmapsto \frac{1}{s^2+\sin^2 u}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_0^{\mathrm{Arcsin}(1-\varepsilon)} \frac{du}{s^2+\sin^2 u} \underset{\varepsilon>0}{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{s^2+\sin^2 u}$.

D'où $\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{s^2+\sin^2 u}$ $\left(\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}} \text{ converge} \right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{s^2+\sin^2 u} \underset{\uparrow}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)\left(s^2+\frac{v^2}{1+v^2}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{s^2+(1+s^2)v^2}$$

changement de variable : $v = \tan u$ $\quad dv = (1+v^2)\,du$ $\quad \sin^2 u = \frac{v^2}{1+v^2}$

(pas de problème de convergence d'intégrale !)

Or $\int_0^A \frac{dv}{s^2+(1+s^2)v^2} = \frac{1}{s^2}\int_0^A \frac{dv}{1+\left(\frac{1+s^2}{s^2}\right)v^2} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}v\right)\right]_0^A$

$$= \frac{1}{s\sqrt{1+s^2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+s^2}}{s}A\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{s\sqrt{1+s^2}}\,\frac{\pi}{2}$$

D'où, finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+s^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{s\sqrt{1+s^2}}}$$

3) a) $\forall s > 0$,

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\frac{2}{\pi}\,H(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\left(\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)dx$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(tx)\,dx\right)dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\frac{s}{(s^2+t^2)}\,dt$$

résultat admis $\qquad$ IV. 2. a)

$$= \frac{2s}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{(s^2+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

$$\boxed{F^*(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \text{ pour } s > 0}$$

b) On trouve immédiatement :

$$\boxed{\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} F^*(0) = 1}$$

X